Απολυτήριες εξετάσεις Γ΄ Τάξης

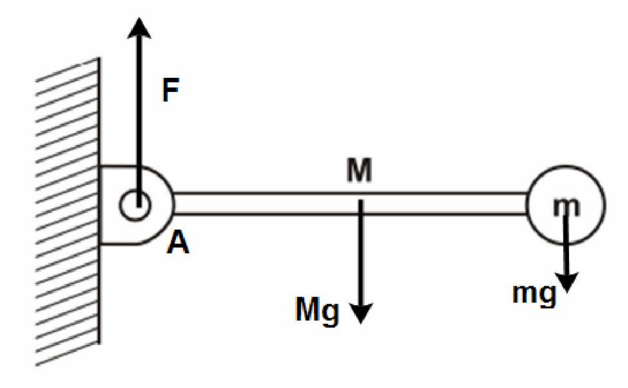
Ημερήσιου Γενικού Λυκείου

ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ.
29 – 5 – 2015

ΘΕΜΑ Α: **Α1. α** **Α2. β** **Α3. α**
Α4. δ **Α5. α) Λ**
β) Σ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Σ

ΘΕΜΑ Β: **Β1.** Σωστό το **iii.**

Αιτιολόγηση: Οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα ράβδου – σφαιριδίου είναι το βάρος της ράβδου (M**g**), το βάρος του σφαιριδίου (m**g**) και μία δύναμη από την άρθρωση (**F**), όπως φαίνεται στο σχήμα. Με εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα **για το σύστημα ράβδου – σφαιριδίου** τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο, παίρνουμε:



$$\Sigma\boldsymbol{\tau}_{(A)} = I_{(A)}\boldsymbol{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow Mg\frac{L}{2} + mgL = \left(\frac{ML^2}{3} + mL^2\right)\alpha_{\gamma} \overset{m=\frac{M}{2}}{\Rightarrow} MgL = \frac{5ML^2}{6}\alpha_{\gamma} \Rightarrow$$

$$\alpha_{\gamma} = \frac{6g}{5L}$$

όπου α_{γ} η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος ράβδου - σφαιριδίου τη στιγμή που αφήνεται ελεύθερο. Εφαρμόζοντας τώρα τον γενικό $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα **για τη ράβδο μόνο** θα έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{L}_{\rho}}{dt} = \Sigma\boldsymbol{\tau}_{\rho} \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}_{\rho}}{dt} = I_{\rho}\boldsymbol{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow \frac{dL_{\rho}}{dt} = \frac{ML^2}{3}\cdot\frac{6g}{5L} \Rightarrow \frac{dL_{\rho}}{dt} = \frac{2MgL}{5}$$

B2. Σωστό το **iii.**

Αιτιολόγηση: Ο τρίτος δεσμός απέχει από τη θέση x = 0 απόσταση:

$$x_3 = (2 \cdot 2 + 1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{9\lambda}{4}$$

Επομένως η θέση ισορροπίας του σημείου Μ απέχει από την θέση x = 0 απόσταση:

$$x_M = x_3 + \frac{\lambda}{12} \Rightarrow x_M = \frac{7\lambda}{3}$$

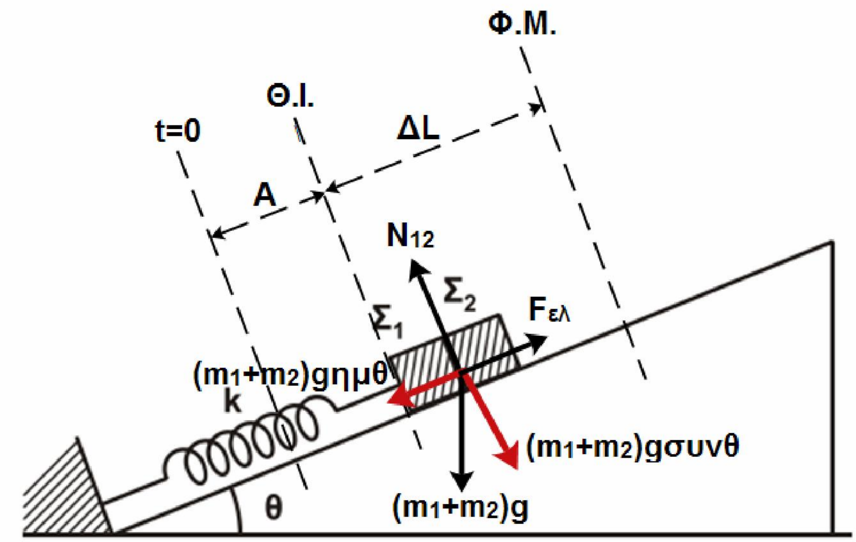
Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ θα είναι συνεπώς:

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x_M}{\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\frac{7\lambda}{3}}{\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{14\pi}{3}\right| \Rightarrow$$

$$A' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(4\pi + \frac{2\pi}{3})\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi}{3})\right| = 2A \cdot \frac{1}{2} = A$$

B3. Σωστό το **i.**

Αιτιολόγηση: Στο σχήμα φαίνονται οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα των δύο σωμάτων όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του (Θ.Ι.).



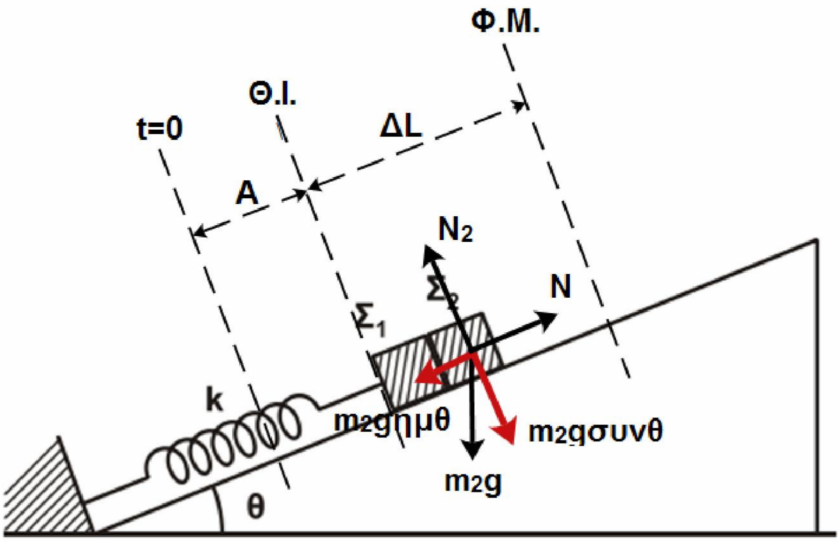
Αν θεωρήσουμε ότι αυτή η θέση απέχει ΔL από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (Φ.Μ.), τότε από τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα xx΄ έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta = k\Delta L \Rightarrow$$

$$\Delta L = \frac{(m_1 + m_2)g\eta\mu\theta}{k} \quad (1)$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που δέχεται μόνο το σώμα Σ_2, όπου με **N** σημειώνουμε την κάθετη αντίδραση επαφής που δέχεται το σώμα Σ_2 από το σώμα Σ_1. Έστω ότι θέτουμε το σύστημα σε ταλάντωση πλάτους Α. Εφόσον το σώμα Σ_2 δεν χάνει την επαφή του με το σώμα Σ_1 θα εκτελεί μαζί με αυτό γραμμική αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$. Τότε για μία τυχαία θέση αυτής της ταλάντωσης που βρίσκεται σε απόσταση x κάτω από την θέση ισορροπίας θα έχουμε για το σώμα Σ_2:

$$\Sigma F_x = -D_2 x \Rightarrow m_2 g\eta\mu\theta - N = -m_2\omega^2 x \Rightarrow m_2 g\eta\mu\theta - N = -\frac{m_2 k}{m_1 + m_2}x \quad (2)$$



Τη στιγμή που τα δύο σώματα αποχωρίζονται θα έχουμε N = 0. Από τη σχέση (2) βρίσκουμε ότι αυτό θα συμβεί στη θέση της ταλάντωση που απέχει από τη θέση ισορροπίας απόσταση:

$$x=-\frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\theta}{k}\overset{(1)}{=}-\Delta L$$

Δηλαδή τα δύο σώματα αποχωρίζονται τη στιγμή που το ελατήριο αποκτά το φυσικό του μήκος (το πρόσημο «-» στην τελευταία σχέση σημαίνει ότι η θέση αποχωρισμού βρίσκεται πάνω από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης). Επομένως για να μην αποχωριστούν τα σώματα θα πρέπει να ισχύει:

$$A<\Delta L\overset{(1)}{\Rightarrow}A<\frac{(m_1+m_2)g\eta\mu\theta}{k}\Rightarrow A\cdot k<(m_1+m_2)g\eta\mu\theta$$

ΘΕΜΑ Γ: **Γ1.** Γνωρίζουμε ότι σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων τη στιγμή που i = 0 έχουμε U_E = E. Άρα από τη σχέση που δίνεται παίρνουμε:

$$U_E=8\cdot10^{-2}(1-i^2)\overset{i=0}{\Rightarrow}E=8\cdot10^{-2}\,J$$

Οπότε θα έχουμε:

$$E=8\cdot10^{-2}\,J\Rightarrow\frac{Q^2}{2C}=8\cdot10^{-2}\,J\overset{Q=CV}{\Rightarrow}\frac{CV^2}{2}=8\cdot10^{-2}\,J\Rightarrow C=10^{-4}\,F$$

Επίσης από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας σε μία ηλεκτρική ταλάντωση παίρνουμε:

$$U_E+U_B=E\Rightarrow8\cdot10^{-2}(1-i^2)+\frac{Li^2}{2}=8\cdot10^{-2}\,J\Rightarrow L=16\cdot10^{-2}\,H$$

Άρα η περίοδος των ηλεκτρικών ταλαντώσεων θα είναι:

$$T=2\pi\sqrt{LC}\Rightarrow T=8\pi\cdot10^{-3}\,sec$$

Γ2. Η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου σε κύκλωμα ηλεκτρικών ταλαντώσεων όπου για t = 0 είναι i = 0, δίνεται από τη σχέση: U_E = Εσυν^{2}ωt. Επομένως θα έχουμε:

$$U_E=E\sigma\upsilon\nu^2\omega t\overset{t=\frac{T}{12}}{\Rightarrow}U_E=8\cdot10^{-2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{2\pi}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{12}\Rightarrow U_E=6\cdot10^{-2}\,J$$

Γ3. Τη στιγμή που $U_E = 3U_B$ θα έχουμε για το φορτίο q του πυκνωτή:

$$\left.\begin{array}{l} U_E = 3U_B \\ U_E + U_B = E \end{array}\right\} \Rightarrow U_E + \frac{U_E}{3} = E \Rightarrow \frac{4}{3}\frac{q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}CV \quad (1)$$

Η στιγμιαία ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα δίνεται από τη σχέση: $i = -\omega Q\eta\mu\omega t$, οπότε για το ρυθμό μεταβολής του ρεύματος θα έχουμε:

$$i = -\omega Q\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{di}{dt} = \left(-\omega Q\eta\mu\omega t\right)' = -\omega^2 Q\sigma\upsilon\nu\omega t \overset{q=Q\sigma\upsilon\nu\omega t}{=} \overset{(1)}{-\omega^2 q} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega^2 CV \overset{\omega^2=\frac{1}{LC}}{\Rightarrow} \left|\frac{di}{dt}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{V}{L} \Rightarrow \left|\frac{di}{dt}\right| = 125\cdot\sqrt{3}A/\sec$$

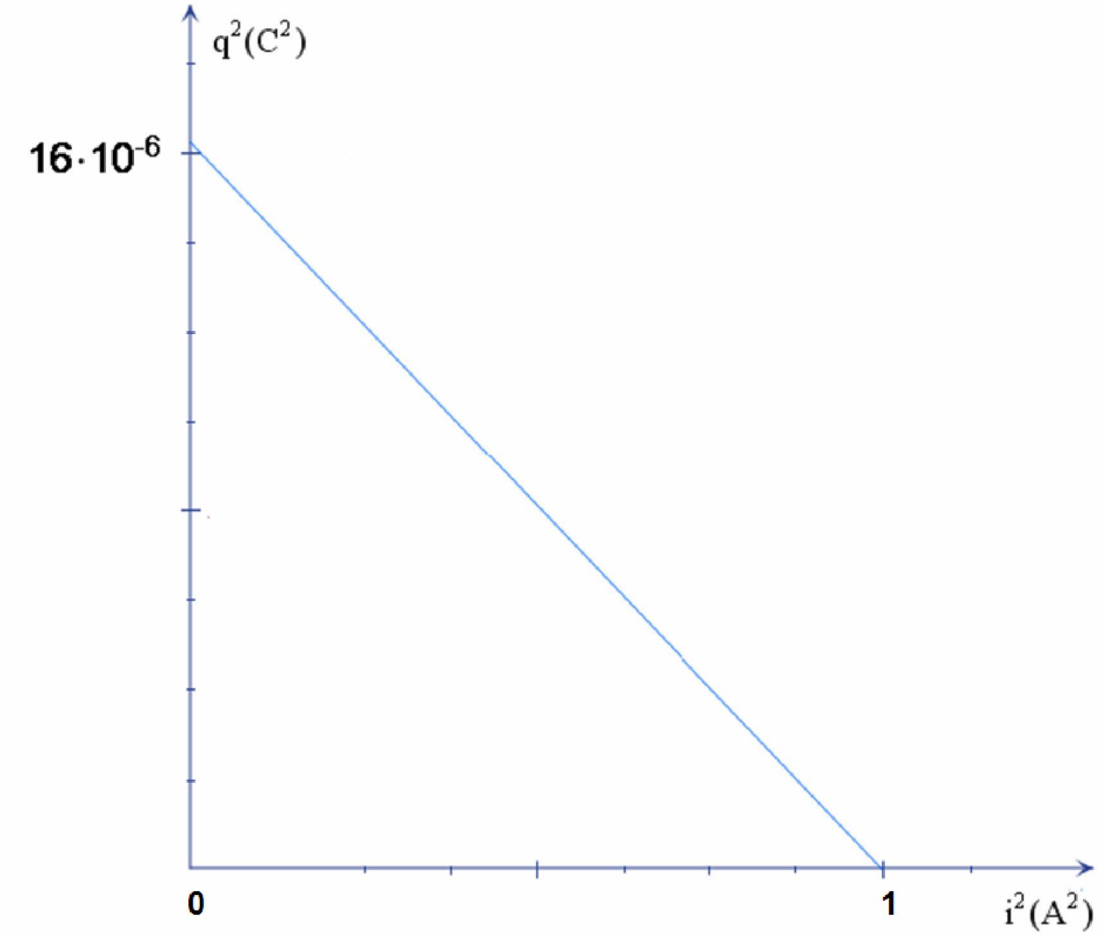
Γ4. Από την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας στην ηλεκτρική ταλάντωση παίρνουμε:

$$U_E + U_B = E \Rightarrow \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = E \Rightarrow q^2 = 16\cdot10^{-6} - 16\cdot10^{-6} i^2 \quad (S.I.)$$

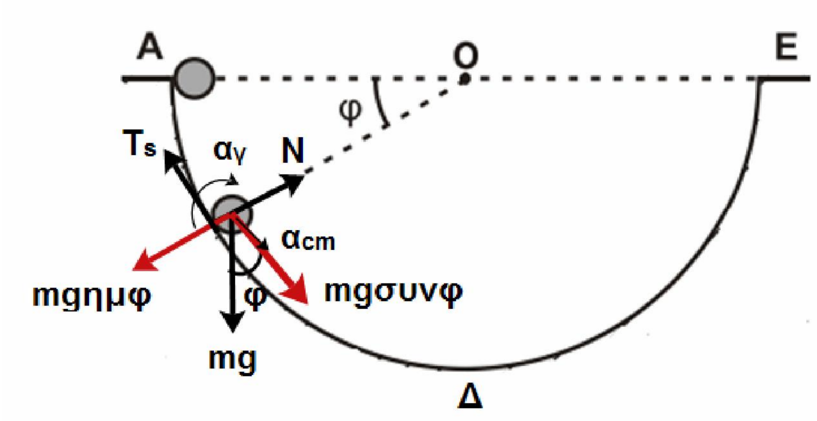
όπου για την ένταση του ρεύματος υπάρχει ο περιορισμός:

$$-\omega Q \le i \le \omega Q \Rightarrow -\frac{2\pi}{T}CV \le i \le \frac{2\pi}{T}CV \Rightarrow -1A \le i \le 1A$$

Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης που είναι της μορφής $y = \alpha - \beta x$, όπου $x = i^2$, φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



ΘΕΜΑ Δ: **Δ1.** Στο σχήμα βλέπουμε τη σφαίρα σε μία τυχαία θέση στην οποία έχει επιτάχυνση κέντρου μάζας α_{cm} και γωνιακή επιτάχυνση λόγω της κύλισής της α_γ. Εφαρμόζουμε τους θεμελιώδεις νόμους για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση της σφαίρας, οπότε έχουμε:



$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_s = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow T_s r = \frac{2}{5}mr^2\alpha_\gamma \overset{\alpha_{cm}=r\alpha_\gamma}{\Rightarrow} T_s = \frac{2}{5}m\alpha_{cm} \quad (2)$$

Επιλύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε:

$$\alpha_{cm} = \frac{5}{7}g\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{50}{7}\sigma\upsilon\nu\varphi \ \text{(S.I.)}$$

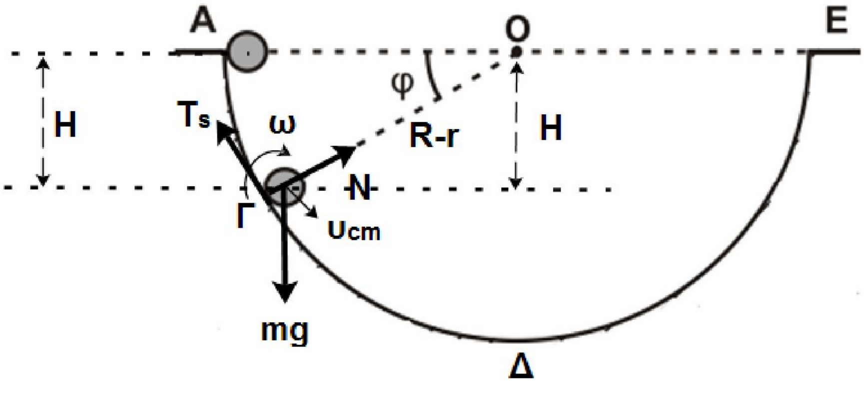
και

$$T_s = \frac{2}{7}mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow T_s = 4\sigma\upsilon\nu\varphi \ \text{(S.I.)}$$

Δ2. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Νεύτωνα στον άξονα yy΄ στο σημείο Γ παίρνουμε:

$$\Sigma F_y = m\alpha_\kappa \Rightarrow N - mg\eta\mu\varphi = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R-r} \overset{r=R/8}{\Rightarrow} N = mg\eta\mu\varphi + \frac{8m\upsilon_\Gamma^2}{7R} \quad (3)$$

όπου υ_Γ η ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Γ. Τονίζουμε ότι για την κίνηση της σφαίρας στο ημικύκλιο ακτίνας R λαμβάνουμε υπ' όψη μας ότι το κέντρο μάζας της σφαίρας διαγράφει κυκλική κίνηση **ακτίνας (R – r) = 7R/8**. Για να βρούμε τη ταχύτητα του κέντρου μάζας της σφαίρας στο Γ εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας από τη θέση Α στη θέση Γ, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι η τριβή που δέχεται η σφαίρα από την επιφάνεια είναι στατική και συνεπώς το συνολικό της έργο είναι ίσο με το μηδέν. Έχουμε λοιπόν:



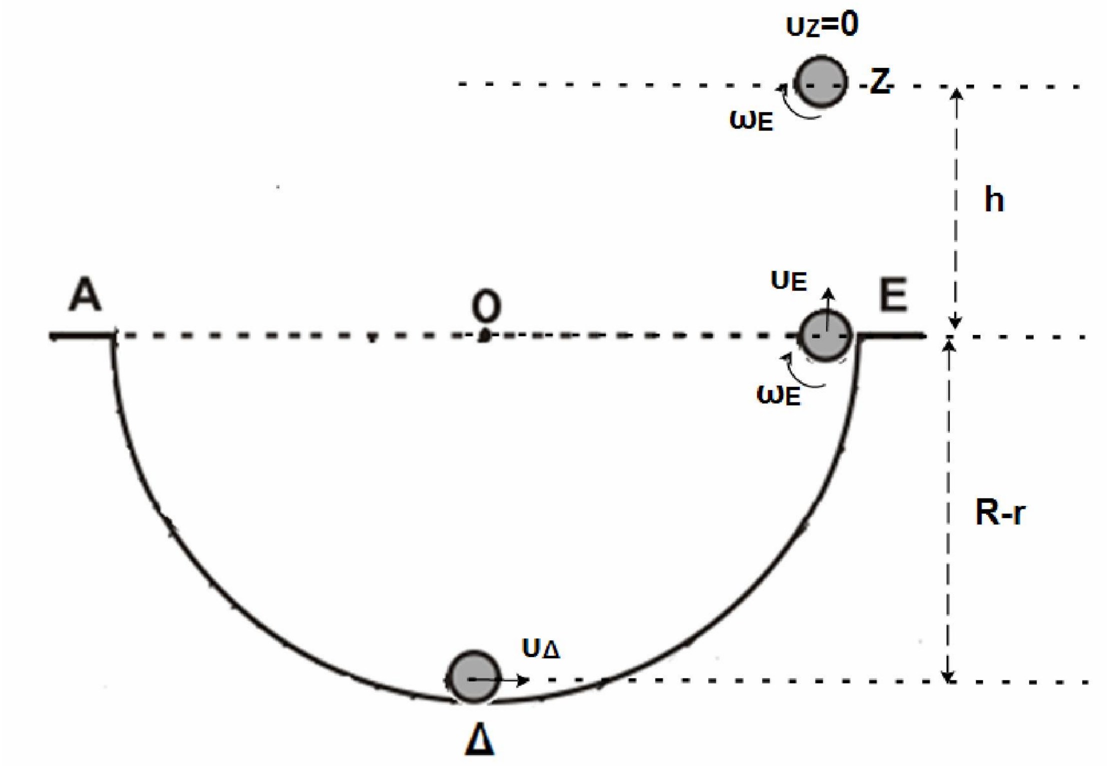
$$K_\Gamma - K_A = W_{mg} \Rightarrow \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgH \Rightarrow \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{mr^2\omega^2}{2} = mg(R-r)\eta\mu\varphi \overset{\upsilon_\Gamma = r\omega}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon_\Gamma^2 = \frac{10g(R-r)\eta\mu\varphi}{7} \overset{r=R/8}{=} \frac{10gR\eta\mu\varphi}{8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το δεδομένο ότι η σφαίρα κυλά στο εσωτερικό του ημικυκλίου οπότε θα ισχύει $\upsilon_\Gamma = r\omega$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3) βρίσκουμε μετά από την αριθμητική αντικατάσταση για τη δύναμη N που ασκεί η ημισφαιρική επιφάνεια στη σφαίρα:

$$N = 17N$$

Δ3. Στο σχήμα φαίνεται η κίνηση της σφαίρας από το σημείο Δ όπου εκτοξεύεται μέχρι το σημείο Z όπου μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του κέντρου μάζας της. Σημειώνουμε ότι από το σημείο Ε έως το σημείο Z η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας δεν μεταβάλλεται διότι δεν δέχεται καμία ροπή.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας από το σημείο Δ έως το σημείο Ε και έχουμε:

$$K_E - K_\Delta = W_{mg} \Rightarrow \frac{m\upsilon_E^2}{2} + \frac{I\omega_E^2}{2} - \frac{m\upsilon_\Delta^2}{2} = -mg(R-r) \overset{r=R/8}{\Rightarrow}$$

$$\frac{m\upsilon_E^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{mr^2\omega_E^2}{2} - \frac{m\upsilon_\Delta^2}{2} = -\frac{7}{8}Rmg \overset{\upsilon_E = r\omega_E}{\Rightarrow} \upsilon_E = 4m/\sec$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε θεώρημα έργου – ενέργειας από το σημείο Ε έως το σημείο Z όπου η σφαίρα σταματά να ανέρχεται και έχουμε:

$$K_Z - K_E = W_{mg} \Rightarrow \cancel{\frac{I\omega_E^2}{2}} - \frac{m\upsilon_E^2}{2} - \cancel{\frac{I\omega_E^2}{2}} = -mgh \Rightarrow h = 0.8m$$

Δ4. Μόλις χάσει την επαφή της με την ημισφαιρική επιφάνεια η σφαίρα κινείται δεχόμενη μόνο το βάρος της, το οποίο δεν έχει ροπή. Επομένως για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας θα ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = 0$$

Ενώ για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας θα ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon_E - \Sigma\tau \cdot \omega_E \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -mg \cdot \upsilon_E = -56J/s$$

<u>Σχόλια:</u> Τα θέματα ήταν σαφή και χωρίς λάθη. Η κλιμάκωση της δυσκολίας από το Γ στο Δ θέμα είναι ιδιαιτέρως μεγάλη. Το θέμα Β1 καθώς και το θέμα Δ προϋποθέτουν βαθιά γνώση της μηχανικής του στερεού η οποία δεν μπορεί να αναμένεται από μαθητές Γ λυκείου. Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι στο θέμα Δ2 χρειάζεται η έννοια της κεντρομόλου επιτάχυνσης την οποία οι μαθητές διδάσκονται στην Β λυκείου ενώ στο βιβλίο της Γ λυκείου δεν γίνεται καμία αναφορά σε αυτό το φυσικό μέγεθος.

Επιμέλεια Απαντήσεων:
Βάρης Βασίλης